



Probleme potrivite atat pt cls a VI-a, cat si pt pregatire EN, cls a VIII-a

Cls a VI-a - Divizibilitate

Probleme mai deosebite care pot sa apara la Evaluare Nationala

1. Determinati numerele prime a si b, stiind ca $3a + 16b = 54$

Rezolvare:

Vom folosi: Singurul numar prim par este 2 ⁽¹⁾

Cand avem de rezolvat probleme cu nr. prime, folosim divizibilitatea
Prima la care ne gandim este divizibilitatea cu 2 (paritate)

$$\Rightarrow 3a = \underbrace{54}_{\div 2} - \underbrace{16b}_{\div 2} \Leftrightarrow 3a = \underbrace{2(27 - 8b)}_{\text{divizibil cu 2}} \left. \begin{array}{l} \Rightarrow 3a \div 2 \\ \text{cu } 3 \neq 2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \div 2 \text{ deci } a \text{ nr. prim, par } \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \underline{\underline{a = 2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot 2 + 16b = 54 \Leftrightarrow 16b = 54 - 6 \Leftrightarrow 16b = 48 \mid :16 \Rightarrow \underline{\underline{b = 3}} \text{ prim } \textcircled{1}$$



2. Determinati numerele prime care impartite la 8 dau catul 12

Rezolvare: Folosim Teorema Impartirii cu Rest (T.i.R):

$$D = J \cdot C + R ; 0 \leq R < J$$

$D, J, C, R \in \mathbb{N}$

Diagrama de etichetare:

- D : deimpartit
- J : impartitor
- C : cat
- R : rest

$$\rightarrow n = 8 \cdot 12 + R, \quad 0 \leq R < 8$$

\rightarrow impartitorul $\xrightarrow{R \in \mathbb{N}}$ $\Rightarrow R \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

R	0	1	2	3	4	5	6	7
n	$8 \cdot 12 = 96$	$8 \cdot 12 + 1 = 97$	$8 \cdot 12 + 2 = 98$	$8 \cdot 12 + 3 = 99$	$8 \cdot 12 + 4 = 100$	$8 \cdot 12 + 5 = 101$	$8 \cdot 12 + 6 = 102$	$8 \cdot 12 + 7 = 103$

Dintre aceste numere n trebuie să le alegem pe cele prime **2**



Se excludem pe cele pare \Rightarrow rămân: 97; 99; 101; 103

Dintre acestea se excludem pe cele divizibile cu 3.

99 este divizibil cu 3 \Rightarrow rămân: 97; 101; 103

Sunt aceste nr. prime?

Verificare cu algoritmul învățat:

Impartim numarul pe rand la numerele prime in ordine crescatoare, pana cand are loc unul dintre cazurile:

--> daca ne da restul 0 \Rightarrow STOP: numarul nostru NU este prim

--> daca ajungem astfel incat catul a devenit mai mic decat impartitorul \Rightarrow STOP: numarul nostru este prim

$$\begin{array}{r} 97 : 2 = 48 > 2 \\ 8 \\ \hline 16 \\ 16 \\ \hline \textcircled{1} \neq 0 \end{array}$$

\Rightarrow mai departe: $97 : 3 = 32 > 3$

$$\begin{array}{r} 9 \\ \hline 6 \\ \hline \textcircled{1} \neq 0 \end{array}$$

\Rightarrow mai departe:

3



$$\begin{array}{r}
 97 : 4 = 24 > 4 \\
 \underline{8} \\
 17 \\
 \underline{16} \\
 = 1 \neq 0
 \end{array}$$

\Rightarrow mai departe: $97 : 5 = 19 > 5$

$$\begin{array}{r}
 5 \\
 \underline{47} \\
 45 \\
 = 2 \neq 0
 \end{array}$$

\Rightarrow mai departe:

$$\begin{array}{r}
 97 : 7 = 13 > 7 \\
 \underline{7} \\
 27 \\
 \underline{21} \\
 = 6 \neq 0
 \end{array}$$

\Rightarrow mai departe: $97 : 11 = 8 < 11$

$$\begin{array}{r}
 88 \\
 \underline{99} \\
 = 9 \neq 0
 \end{array}$$

\Rightarrow STOP

97 este prim

Identic pt. 101: puteam sa incepem direct cu 7, pt. ca 101 nu se divide cu 2, 3, 5, nici catul sau este < impartitorul

$$\begin{array}{r}
 101 : 7 = 14 > 7 \\
 \underline{7} \\
 = 31 \\
 \underline{28} \\
 = 3 \neq 0
 \end{array}$$

\Rightarrow mai departe $101 : 11 = 9 < 11$

$$\begin{array}{r}
 99 \\
 \underline{99} \\
 = 2 \neq 0
 \end{array}$$

\Rightarrow STOP

101 este prim

4



Identic pt. 103, viceversa cu 7:

$$\begin{array}{r} 103 : 7 = 14 > 7 \\ \underline{7} \\ 33 \\ \underline{28} \\ \textcircled{5} \neq 0 \end{array}$$

\Rightarrow mai departe : $103 : 11 = \boxed{9 < 11} \Rightarrow \underline{\text{STOP}}$
 $\begin{array}{r} 99 \\ \underline{99} \\ \textcircled{4} \neq 0 \end{array}$
 103 este
 prim

CONCLUZIE : 97, 101, 103 sunt numerele cautate
 $n \in \{97; 101; 103\}$

3. Cati divizori are numarul 1210 ?

Rezolvare: Descompunem nr. 1210 :

$$\Rightarrow 1210 = 2 \cdot 5 \cdot 11^2 = \boxed{1} \cdot \boxed{1} \cdot \boxed{2}$$

$$\Rightarrow \text{Nr. divizorilor este } (1+1) \cdot (1+1) \cdot (2+1) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = \underline{\underline{12}}$$

$$\begin{array}{r|l} 1210 & 2 \\ 605 & 5 \\ 121 & 11 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$\textcircled{5}$



Ne amintim regula :

nr. divizorilor = produsul dintre (putere + 1)

pt fiecare factor prim care apare

ex : dacă descompunem numărul x în :

$$x = a^n \cdot b^m \cdot c^p \cdot d^q, \text{ unde } a, b, c, d \text{ sunt factori primi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{nr. divizorilor lui } x \text{ este: } (n+1) \cdot (m+1) \cdot (p+1) \cdot (q+1)$$

4. Determinați cifra x , știind că $32x$ și 6 sunt prime între ele

Rezolvare:

$$\overline{32x}, 6 \text{ prime între ele} \Rightarrow (\overline{32x}; 6) = 1 \Rightarrow$$
$$(\text{c.m.m.d.c} = 1)$$

$\Rightarrow \overline{32x}$ nu are ca divizori pe divizorii proprii ai lui 6

$$D_6 = \{1; 2; 3; 6\} \Rightarrow$$

(diferenți de 1 și 6)

6



\Rightarrow divizorii proprii lui 6 sunt 2 și 3 \Rightarrow

$\Rightarrow 2 \nmid \overline{32x}$ și $3 \nmid \overline{32x}$

\Downarrow

$x \notin \{0; 2; 4; 6; 8\} \Rightarrow x$ poate fi: 1; 3; 5; 7; 9 $\left. \begin{array}{l} (3+2+x) \not\equiv 3 \pmod{3} \\ (5+x) \not\equiv 3 \pmod{3} \end{array} \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in \{3; 5; 9\}$

5. Determinati numerele naturale a si b pentru care:

a). $(a;b) = 5$ si $a+b = 60$;

b). $(a;b) = 6$ si $a \cdot b = 216$;

c). $[a;b] = 360$ si $(a;b) = 15$;

d). $[a;b] = 144$ si $a \cdot b = 6912$

Rezolvare:

a) $(a;b) = 5 \Rightarrow \exists k, m \in \mathbb{N}^*$, $(k;m) = 1$ (prime între ele și nenule)

a.î. $a = k \cdot 5$
 $b = m \cdot 5$

Cum $a+b = 60 \Rightarrow k \cdot 5 + m \cdot 5 = 60 \Rightarrow$





$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 5(k+n) = 60 \quad (:5 \Leftrightarrow k+n = \frac{60}{5} \Leftrightarrow k+n = 12 \end{aligned} \left. \vphantom{\frac{60}{5}} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} (k, n) = 1 \\ k, n \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

\Rightarrow cazuri:

Sunt prime unele ele

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
n	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

nu sunt prime unele ele!

a	$5 \cdot 1 = 5$	/	/	/	$5 \cdot 5 = 25$	/	$5 \cdot 7 = 35$	/	/	$5 \cdot 11 = 55$
b	$5 \cdot 11 = 55$	/	/	/	$5 \cdot 7 = 35$	$5 \cdot 5 = 25$	/	/	$5 \cdot 1 = 5$	

$\Rightarrow a = 5$ și $b = 55$

sau: $a = 25$ și $b = 35$

sau: $a = 35$ și $b = 25$

sau: $a = 55$ și $b = 5$

8

$$b) (a; b) = 6 \text{ și } a \cdot b = 216$$

$$\Downarrow$$

$$\exists k, m \in \mathbb{N}^*, (k, m) = 1 \quad a. \hat{1}. \quad \left. \begin{array}{l} a = 6k \\ b = 6m \end{array} \right\} \Rightarrow 6k \cdot 6m = 216 \quad | : 36$$

$$\Rightarrow k \cdot m = 6$$

$$(k, m) = 1$$

$$k, m \in \mathbb{N}^*$$

$$\left. \begin{array}{l} 216 : 36 = 6 \\ \underline{216} \\ \underline{= = =} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

\Rightarrow Cazuri :

toate perechile sunt prime intre ele

k	1	2	3	6
m	6	3	2	1
a	$6 \cdot 1 = 6$	$6 \cdot 2 = 12$	$6 \cdot 3 = 18$	$6 \cdot 6 = 36$
b	$6 \cdot 6 = 36$	$6 \cdot 3 = 18$	$6 \cdot 2 = 12$	$6 \cdot 1 = 6$

$$\Rightarrow (a = 6 \text{ și } b = 36)$$

$$\text{SAU } (a = 12 \text{ și } b = 18)$$

$$\text{SAU } (a = 18 \text{ și } b = 12)$$

$$\text{SAU } (a = 36 \text{ și } b = 6)$$

$$c) [a; b] = 360; (a; b) = 15$$

$$\text{Folosim: } [a; b] \cdot (a; b) = a \cdot b \Rightarrow a \cdot b = 360 \cdot 15$$

$$\text{din } (a; b) = 15 \Rightarrow \exists k, m \in \mathbb{N}^*, (k; m) = 1 \text{ a. i.} \left. \begin{array}{l} a = 15k \\ b = 15m \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{15}k \cdot \cancel{15}m = 360 \cdot \cancel{15} \quad | :15 \Leftrightarrow 15k \cdot m = 360 \quad | :15 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} k \cdot m = 24 \\ (k; m) = 1; k, m \in \mathbb{N}^* \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r} 360 : 15 = 24 \\ \underline{30} \\ = 60 \\ \underline{60} \\ = \end{array}$$

\Rightarrow catunile:



⇒

Nu sunt prime între ele:

k	1	2	3	4	6	8	12	24
n	24	12	8	6	4	3	2	1
a	15 · 1 = 15		15 · 3 = 45			15 · 8 = 120		15 · 24 = 360
b	15 · 24 = 360		15 · 8 = 120			15 · 3 = 45		15 · 1 = 15

15
24
60
30
360

Sunt prime între ele

⇒ $a=15$ și $b=360$ sau $a=45$ și $b=120$
 sau $a=120$ și $b=45$ sau $a=360$ și $b=15$

d) $[a; b] = 144$ și $a \cdot b = 6912$ } ⇒ $144 \cdot (a; b) = 6912$ ⇒
 Folosim tot: $[a; b] (a; b) = a \cdot b$



$$\Rightarrow (a; b) = \frac{6912}{144} \Rightarrow (a; b) = 48 \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r} 6912 : 144 = 48 \\ \underline{576} \\ 1152 \\ \underline{1152} \\ \hline \end{array}$$

$$\Rightarrow \exists k, n \in \mathbb{N}^*, (k; n) = 1 \text{ a.} \hat{?} :$$

$$a = 48 \cdot k$$

$$b = 48 \cdot n$$

$$\text{Cum } a \cdot b = 6912$$

$$\left. \begin{array}{l} a = 48 \cdot k \\ b = 48 \cdot n \\ \text{Cum } a \cdot b = 6912 \end{array} \right\} \Rightarrow 48k \cdot 48n = 6912 \quad | :48$$

$$48k \cdot n = 144 \quad | :48$$

$$\begin{array}{r} 144 : 48 = 3 \\ \underline{144} \\ \hline \end{array}$$

$$k \cdot n = 3 \Rightarrow$$

perechi prime intre ele

\Rightarrow cazuri:

k	1	3
n	3	1
a	$48 \cdot 1 = 48$	$48 \cdot 3 = 144$
b	$48 \cdot 3 = 144$	$48 \cdot 1 = 48$

\Rightarrow

$$\Rightarrow \underline{a = 48 \text{ si } b = 144} \quad \text{Sau} \quad \underline{a = 144 \text{ si } b = 48}$$



6. Aratati ca pentru orice numar natural n ,
a). $(5n+3; 7n+4) = 1$; b). $(5n+13; 3n+8) = 1$

Rezolvare:

a) $(5n+3; 7n+4) = 1, \forall n \in \mathbb{N}$

Presupunem că $(5n+3; 7n+4) = d, d \in \mathbb{N}^*$

Vom arăta că $d = 1$

Folosim: dacă $a|b \Rightarrow a|n \cdot b, \forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} (5n+3; 7n+4) = d &\Rightarrow d | 5n+3 & \cdot 7 &\Rightarrow d | 7(5n+3) &\Rightarrow \\ & d | 7n+4 & \cdot 5 &\Rightarrow d | 5(7n+4) &\Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} d | 35n+21 \\ d | 35n+20 \end{array} \right\} \text{scădem} \left[\begin{array}{l} \text{Folosim: dacă } a|b \\ a|c \end{array} \right] \Rightarrow a|b-c$$

$$\Rightarrow d | 35n+21 - 35n-20 \Rightarrow d | 21-20 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} d | 1 \\ d \in \mathbb{N}^* \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{d=1} \Rightarrow \underline{(5n+3; 7n+4) = 1, \forall n \in \mathbb{N}}$$

13

$$b) \quad \underline{(5m+13; 3n+8) = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}}$$

$$\text{Presupunere: } (5m+13; 3n+8) = d, \quad d \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} d \mid 5m+13 \quad | \cdot 3 \Rightarrow d \mid 3(5m+13) \Rightarrow d \mid 15m+39 \quad (1) \\ d \mid 3n+8 \quad | \cdot 5 \Rightarrow d \mid 5(3n+8) \Rightarrow d \mid 15n+40 \quad (2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{scadem} \\ (2)-(1) \end{array}$$

$$\Rightarrow d \mid \underline{15n+40 - 15n-39} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d \mid 40-39 \Rightarrow d \mid 1$$

$$\left. \begin{array}{l} d \mid 1 \\ d \in \mathbb{N}^* \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{d=1}} \Rightarrow (5n+13; 3n+8) = 1$$

$$\underline{\forall n \in \mathbb{N}} \quad \#$$