Mind Generation SRL
Strada Manastur, nr 31, Ap.1,
Cluj Napoca

0747 293 739
office@mindgeneration.ro

Mind Generation
Centru de Matematica si Informatica

Apoteme - in plan si in spatiu

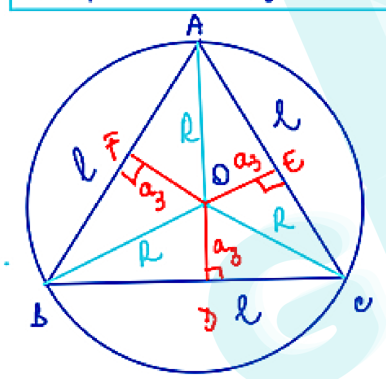
Apotema - este o notiune folosita atat in plan cat si in geometria in spatiu
- In plan, apotema este legata de notiunea de poligon regulat.
  Cele mai uzuale poligoane regulate inscrise in cerc sunt: triunghi echilateral, patrat, hexagon regulat
- In spatiu, notiunea de apotema este legata de piramida regulata, unde avem: apotema bazei, caz in care aplicam notiunile din geometria in plan si apotema piramidei.

Le vom lua pe rand :)

I. Apoteme in poligoane regulate inscrise in cerc (geometrie plana)

Apotema unui poligon regulat este segmentul dus perpendicular din centrul poligonului regulat pe oricare dintre laturile poligonului regulat.
Orice poligon regulat este inscris intr-un cerc, de aici si legatura dintre laturile poligonului regulat, apotema si raza cercului in care este inscris poligonul regulat.

I. 1. Apotema in triunghiul echilateral



ABC Δ echilateral de latura l: $AB = AC = BC = l$

$\mathcal{C}(O, R)$ = cercul circumscris Δ-ului

Δ-ul fiind echilateral, O va fi și centrul Δ-ului, adică:
- centru de greutate
- ortocentru
- centrul cercului inscris în Δ

Dacă $AD \perp BC$, $BE \perp AC$, $CF \perp AB \Rightarrow \{O\} = AD \cap BE \cap CF$

$\Rightarrow \boxed{OD = OE = OF = \text{apotema } \Delta\text{-ului echilateral } ABC} = a_3$ (notație)

Cum O = centru de greutate $\Rightarrow OD = \frac{1}{3}AD$; Dar $AD = h = \frac{l\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{a_3 = \frac{l\sqrt{3}}{6}}$ (1)

Mind Generation SRL
Strada Manastur, nr 31, Ap.1,
Cluj Napoca

0747 293 739
office@mindgeneration.ro

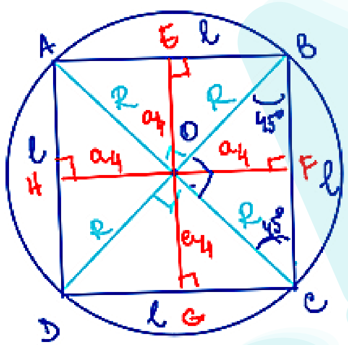
$$\left.\begin{array}{l} OA = OB = OC = R \\ O = \text{centru de greutate} \end{array}\right\} \Rightarrow OA = OB = OC = \frac{2}{3}h = \frac{\cancel{2}^{1}}{3}\cdot\frac{l\sqrt{3}}{\cancel{2}_{1}} = \frac{l\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \boxed{R = \frac{l\sqrt{3}}{3}} \quad (2)$$

și în același timp : $OA = 2\,OD$ $\left(OA = \frac{2}{3}h\ ;\ OD = \frac{1}{3}h\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{R = 2a_3 \quad \text{sau} \quad a_3 = \frac{R}{2}} \quad (3)$$

Obs: Triunghiul fiind echilateral, inaltimea cade in mijlocul laturii opuse, deci apotema poate fi definita si ca segmentul care uneste centrul triunghiului cu mijlocul laturii triunghului !

I.2. Apotema patratului



$ABCD$ pătrat : $AB = BC = CD = DA = l$

$\{O\} = AC \cap BD$ = centrul pătratului = centrul cercului circumscris pătratului

$\Rightarrow AO = BO = CO = DO = R \quad (*)$

Ducem $OE \perp AB$, $OF \perp BC$; $OG \perp DC$; $OH \perp AD \Rightarrow$

$\Rightarrow OE = OF = OG = OF$ = apotema pătratului $ABCD$ = a_4 (notație)

Obs: Cum $AD \parallel BC$ și $AB \parallel DC \Rightarrow O \in [EG]$ și $O \in [HF]$ $(\{O\} = EG \cap HF)$

$$\left.\begin{array}{l} ABCD \text{ pătrat} \Rightarrow AC \perp BD \\ (*) \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\Delta AOB,\ \Delta OBC,\ \Delta ODC,\ \Delta OAD \text{ dreptunghice isoscele}}$$

$\Rightarrow E$ mijl. $[AB]$; F = mijl. $[BC]$; G = mijl. $[DC]$; H = mijl. $[AD] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{luăm } \Delta ABC \left\{\begin{array}{l} O = \text{mijl. } [AC] \\ F = \text{mijl. } [BC] \end{array}\right. \Rightarrow [OF] = \text{linie mijlocie} \Rightarrow OF = \frac{AB}{2} = \frac{l}{2} \Rightarrow \boxed{a_4 = \frac{l}{2}} \quad (1)$$

Mind Generation SRL
Strada Manastur, nr 31, Ap.1,
Cluj Napoca

0747 293 739
office@mindgeneration.ro

$OA=OB=OC=OD=\frac{AC}{2}=\frac{BD}{2}=\frac{l\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{R=\frac{l\sqrt{2}}{2}}$ (2) $\Rightarrow l=\frac{2R}{\sqrt{2}}=\frac{\cancel{2}R\sqrt{2}}{\cancel{2}}=R\sqrt{2}$ (1) $\Rightarrow$

[Diag. pătrat $AC=BD=l\sqrt{2}$]

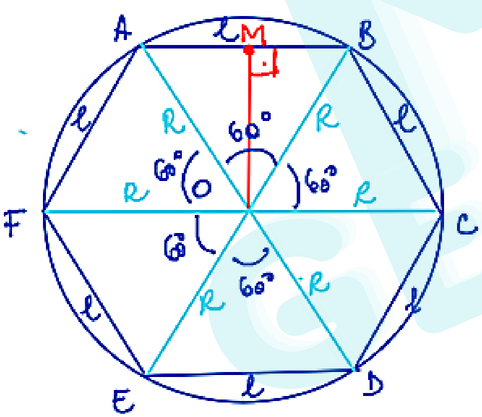
$\Downarrow$

$\boxed{l=R\sqrt{2}}$ (2')

$\Rightarrow \boxed{a_4=\frac{R\sqrt{2}}{2}}$

Obs: Si in cazul patratului constatam ca perpendiculara dusa din centrul patratului pe oricare dintre laturi va cadea in mijlocul laturii ==> apotema o putem defini si ca segmentul care uneste centrul patratului cu mijlocul unei laturi

I.3. Apotema unui hexagon regulat



$AB=BC=CD=DE=EF=FA=l$

$AD\cap BE\cap CF=\{O\} \Rightarrow OA=OB=OC=OD=OE=OF=R$

Ducem $OM\perp AB$ (sau pe oricare altă latură) $\Rightarrow a_6=OM$ (notație)

Cum $\widehat{AOB}=\widehat{BOC}=\widehat{COD}=\widehat{DOE}=\widehat{EOF}=\widehat{FOA}=\frac{360^\circ}{6}=60^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta AOB, \Delta BOC, \Delta COD, \Delta DOE, \Delta EOF, \Delta FOA$ sunt isoscele cu un $\sphericalangle$ de $60^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow$ sunt Δ echilaterale $\Rightarrow \boxed{l=R}$ (1)

$\Downarrow$

$OM=h=\frac{l\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{a_6=\frac{l\sqrt{3}}{2}=\frac{R\sqrt{3}}{2}}$ (2)

Mind Generation SRL
Strada Manastur, nr 31, Ap.1,
Cluj Napoca

0747 293 739
office@mindgeneration.ro

Obs: M este mijlocul laturii hexagonului, deci apotema este segmentul care uneste centrul hexagonului cu mijlocul oricarei laturi

Concluzie: Apotema unui poligon regulat poate fi definita si ca segmentul care uneste centrul poligonului regulat cu mijlocul oricarei laturi a poligonului regulat

II. Apoteme in piramide regulate

Apotema unei piramide regulate este:

- segmentul dus din varful piramidei, perpendicular pe oricare dintre laturile bazei
- segmentul care uneste varful piramidei cu mijlocul oricarei laturi ale bazei
- inaltimea dusa din varful piramidei, in oricare dintre fetele laterale ale piramidei

Notație: a_p = apotema piramidei

Toate definitiile de mai sus sunt echivalente !

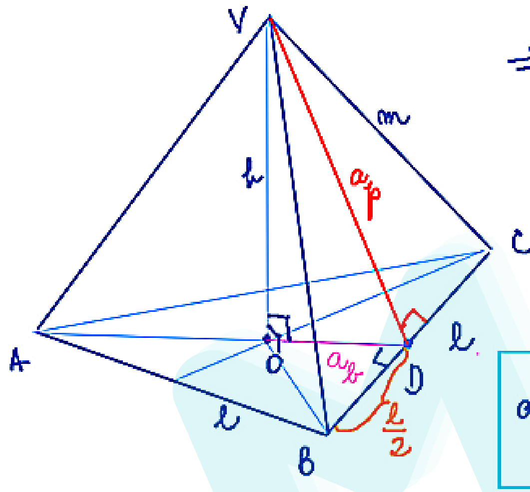
Apotema bazei intr-o piramida regulata este apotema poligonului regulat care este baza piramidei (punctul I.)

Notație: a_b = apotema bazei

Mind Generation SRL
Strada Manastur, nr 31, Ap.1,
Cluj Napoca

0747 293 739
office@mindgeneration.ro

II.1. Apoteme in piramira triunghiulara regulata



VABC piramidă triunghiulară regulată $\Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \Delta ABC \text{ echilateral} ;\ AB = AC = BC = l \\ VO \perp (ABC), \text{ unde } O = \text{centrul } \Delta \text{ echilateral } ABC \\ AV = BV = CV \end{cases}$

$OD = a_b = a_3$ (ap. în Δ ABC echilateral $\rightarrow$ vezi pct. I.1)

$\left.\begin{array}{l} OD \perp BC,\ D = \text{mijl. } [BC] \\ \Delta VBC \text{ isoscel} \end{array}\right\} \Rightarrow VD \perp BC \Rightarrow \boxed{a_{p_3} = VD}$

a) Dacă: $VO = h$
$AB = BC = AC = l$ $\Rightarrow$ $\left.a_b = a_3 = \frac{l\sqrt{3}}{6}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta VOD \begin{cases} \widehat{VOD} = 90^\circ \\ VO = h \\ OD = \frac{l\sqrt{3}}{6} = a_3 \end{cases} \xRightarrow{T.P.} VD^2 = VO^2 + OD^2 \Rightarrow VD^2 = h^2 + \frac{l^2 \cdot 3}{36} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{a_{p_3} = \sqrt{h^2 + a_3^2}} \Rightarrow \boxed{a_{p_3} = \sqrt{h^2 + \frac{3l^2}{36}}}$

b) Dacă se dau: $AB = BC = AC = l$ și $VA = VB = VC = m$

$\Rightarrow \Delta VBD \left\{ \begin{array}{l} \widehat{VDB} = 90^\circ \\ VB = m \\ BD = \frac{l}{2} \end{array} \right\} \xRightarrow{T.P.} VB^2 = VD^2 + BD^2 \Rightarrow VD^2 = m^2 - \frac{l^2}{4} \Rightarrow VD = \sqrt{m^2 - \frac{l^2}{4}} \Rightarrow \boxed{a_{p_3} = \sqrt{m^2 - \frac{l^2}{4}}}$

Mind Generation SRL
Strada Manastur, nr 31, Ap.1,
Cluj Napoca

0747 293 739
office@mindgeneration.ro

c) Dacă se dau: $VO = h$ și $VA = VB = VC = m$ $\Rightarrow$ Aflăm l din ΔVOB

$$\begin{cases} \widehat{VOB} = 90^\circ \\ VO = h \\ VB = m \end{cases} \xrightarrow{T.P} VB^2 = VO^2 + OB^2 \Rightarrow OB^2 = m^2 - h^2 \quad (1)$$

Dar $OB = \frac{2}{3} h_{3\,\Delta echilat} = \frac{\cancel{2}}{3} \cdot \frac{l\sqrt{3}}{\cancel{2}} = \frac{l\sqrt{3}}{3} \overset{(1)}{\Longrightarrow} \left(\frac{l\sqrt{3}}{3}\right)^2 = m^2 - h^2 \Rightarrow \frac{\cancel{3}l^2}{\cancel{9}_3} = m^2 - h^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow l^2 = 3(m^2 - h^2) \Rightarrow l = \sqrt{3(m^2 - h^2)}$

Și acum din ΔVBD, cf. pct. b):

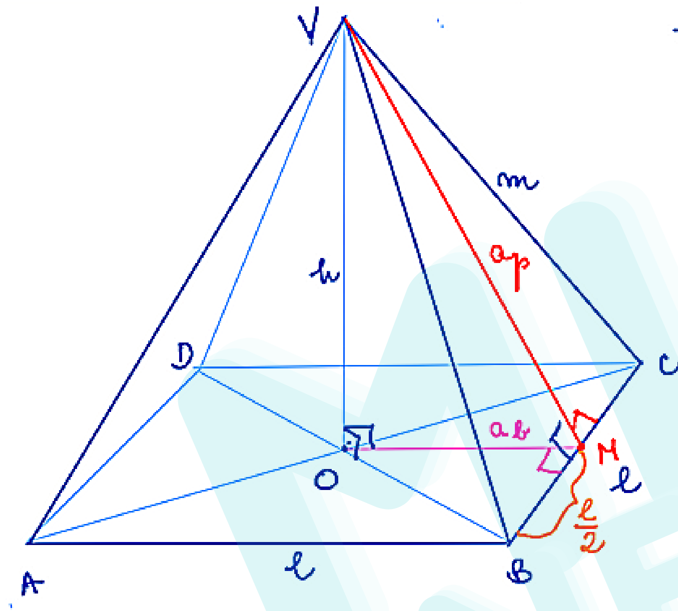
$$VD = a_{p_3} = \sqrt{m^2 - \frac{3(m^2 - h^2)}{4}} = \sqrt{\frac{4m^2 - 3m^2 + 3h^2}{4}} = \frac{\sqrt{m^2 + 3h^2}}{2}$$

OBS: Aceste rezultate $\boxed{\text{NU}}$ trebuie memorate! Trebuie știute metodele de determinare a lungimii apotemei piramidei, în diferitele cazuri de ipoteze!

Mind Generation SRL
Strada Manastur, nr 31, Ap.1,
Cluj Napoca

0747 293 739
office@mindgeneration.ro

II.2. Apoteme in piramida patrulatera regulata



VABCD piramidă patrulateră regulată ⇒

$$\Rightarrow \begin{cases} VO \perp (ABC), \text{ unde } AC \cap BD = \{O\} \\ \square ABCD = \text{pătrat};\ VA = VB = VC = VD = \ell \\ VA = VB = VC = VD \end{cases}$$

Fie M = mijlocul [BC] ⇒ $\boxed{a_b = a_4 = OM = \frac{\ell}{2}}$

$\boxed{a_p = VM}$

$\boxed{\text{a) Dacă se dau } VO = h,\ AB = \ell}$

$$\Delta VOM \begin{cases} \widehat{VOM} = 90^\circ \\ OM = \frac{\ell}{2} \\ VO = h \end{cases} \xRightarrow{T.P.} VM^2 = VO^2 + OM^2 \Rightarrow VM^2 = h^2 + \frac{\ell^2}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{VM = a_p = \sqrt{h^2 + a_b^2}} \Rightarrow \boxed{VM = a_p = \sqrt{h^2 + \frac{\ell^2}{4}}}$$

$\boxed{\text{b) Dacă se dau } AB = \ell \text{ și } VA = VB = VC = VD = m}$

$$\Rightarrow \Delta VBM \left.\begin{cases} \widehat{VMB} = 90^\circ \\ VB = m \\ BM = \frac{\ell}{2} \end{cases}\right\} \xRightarrow{T.P.} VB^2 = VM^2 + BM^2 \Rightarrow VM^2 = m^2 - \frac{\ell^2}{4} \Rightarrow \boxed{VM = a_p = \sqrt{m^2 - \frac{\ell^2}{4}}}$$

Mind Generation SRL
Strada Manastur, nr 31, Ap.1,
Cluj Napoca

0747 293 739
office@mindgeneration.ro

c) Dacă se dau: $VO = h$ și $VA = VB = VC = VD = m$

$$\Delta VOB \begin{cases} \widehat{VOB} = 90^\circ \\ VB = m;\ VO = h \\ OB = \frac{DB}{2} = \frac{\ell\sqrt{2}}{2} \end{cases} \overset{T.P.}{\Longrightarrow} VB^2 = VO^2 + OB^2 \Rightarrow m^2 = h^2 + \left(\frac{\ell\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow m^2 = h^2 + \frac{2\ell^2}{4} \Big| \cdot 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2m^2 = 2h^2 + \ell^2 \Rightarrow \ell^2 = 2(m^2 - h^2)$$

$$\Delta VMB \begin{cases} \widehat{VMB} = 90^\circ \\ VB = m \\ MB = \frac{\ell}{2} \end{cases} \overset{T.P.}{\Longrightarrow} VB^2 = VM^2 + MB^2 \Rightarrow m^2 = VM^2 + \frac{\ell^2}{4} \Rightarrow m^2 = VM^2 + \frac{2(m^2 - h^2)}{4} \Big| \cdot 2$$

$$\Rightarrow 2m^2 = 2VM^2 + m^2 - h^2 \Rightarrow 2VM^2 = m^2 + h^2 \Rightarrow$$

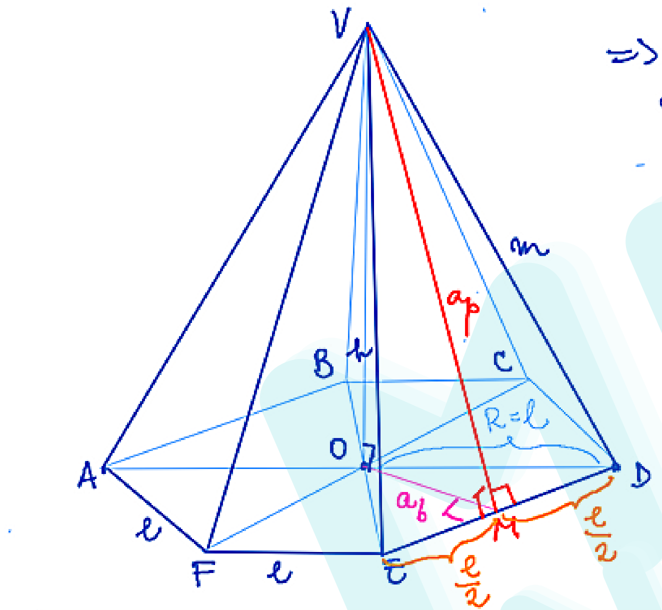
$$\Rightarrow \boxed{VM = a_p = \sqrt{\frac{m^2 + h^2}{2}}}$$

Nu trebuie memorate aceste rezultate, dar trebuie știute metodele de rezolvare

Mind Generation SRL
Strada Manastur, nr 31, Ap.1,
Cluj Napoca

0747 293 739
office@mindgeneration.ro

II.3. Apoteme in piramida hexagonala regulata



$VABCDEF$ piramidă hexagonală regulată $\Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} ABCDEF \text{ hexagon regulat}: AB=BC=CD=DE=EF=FA=\ell \\ VO \perp (ABC),\ O = \text{centrul hexagonului regulat} \Rightarrow \\ VO = h \quad \Rightarrow \{O\} = AD \cap BE \cap FC \\ VA=VB=VC=VD=VE=VF=m \end{cases}$

Fie M = mijlocul $[ED] \Rightarrow OM = a_b = a_6$ = apoteme hexagonului regulat de lat. ℓ

$\Rightarrow \boxed{a_b = a_6 = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}}$ (vezi I.3)

şi $\boxed{VM = a_p}$

a) Dacă se dau $VO = h$, $AB = \ldots = ED = \ell$

$\Delta VOM \begin{cases} \hat{VOM} = 90^\circ \\ VO = h \\ OM = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \end{cases} \xRightarrow{T.P.} VM^2 = VO^2 + OM^2 \Rightarrow VM^2 = h^2 + \frac{3\ell^2}{4} \Rightarrow \boxed{a_p = VM = \sqrt{h^2 + a_b^2}} \Rightarrow \boxed{a_p = VM = \sqrt{h^2 + \frac{3\ell^2}{4}}}$

Mind Generation SRL
Strada Manastur, nr 31, Ap.1,
Cluj Napoca

0747 293 739
office@mindgeneration.ro

$\boxed{\text{b) Se dau } AB = \dots = l \text{ ; } VA = VB = \dots = m}$

$\Delta VEM \begin{cases} \widehat{VME} = 90^\circ \\ VE = m \\ ME = \frac{l}{2} \end{cases} \xRightarrow{T.P.} VE^2 = VM^2 + EM^2 \Rightarrow m^2 = VM^2 + \frac{l^2}{4} \Rightarrow \boxed{a_p = VM = \sqrt{m^2 - \frac{l^2}{4}}}$

$\boxed{\text{c) Se dau } VO = h \text{ și } VA = VB = \dots = m}$

$\Delta VOD \begin{cases} \widehat{VOD} = 90^\circ \\ VO = h \\ VD = m \\ OD = R = l \text{ (vezi I. 3.)} \end{cases} \xRightarrow{T.P.} VD^2 = VO^2 + OD^2 \Rightarrow m^2 = h^2 + l^2 \Rightarrow l^2 = m^2 - h^2 \Rightarrow \boxed{l = \sqrt{m^2 - h^2}}$

$\Delta VMD \begin{cases} \widehat{VMD} = 90^\circ \\ VD = m \\ MD = \frac{l}{2} \end{cases} \xRightarrow{T.P.} VD^2 = VM^2 + MD^2 \Rightarrow m^2 = a_p^2 + \frac{l^2}{4} \Rightarrow a_p^2 = {}^{4)}m^2 - \frac{m^2 - h^2}{4} = \frac{4m^2 - m^2 + h^2}{4}$

$\Rightarrow \boxed{a_p = VM = \frac{\sqrt{3m^2 + h^2}}{2}}$

Reținem metodele de calcul!

Mind Generation SRL
Strada Manastur, nr 31, Ap.1,
Cluj Napoca

0747 293 739
office@mindgeneration.ro

Concluzii:

1. In orice piramida regulata: apotema piramidei = $a_p = \sqrt{h^2 + a_b^2}$; unde a_b = apotema bazei ; h = înălțimea piramidei

2. In orice piramida regulata: apotema piramidei = $a_p = \sqrt{m^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}$; unde m = muchia laterală a piramidei
l = latura bazei piramidei

3. Pentru determinarea relatiilor dintre latura bazei, inaltimea piramidei, apotema bazei, muchia laterala a piramidei si apotema piramidei, se foloseste Teorema lui Pitagora in triunghiurile dreptunghice care se formeaza cu:
- inaltime piramida, apotema baza, apotema piramida
- inaltime piramida, raza cercului circumscris bazei, muchia laterala
- apotema piramidei, muchia piramidei, jumatate din latura bazei
- apotema bazei, raza cercului circumscris bazei, jumatate din latura bazei

SPOR LA ÎNVĂȚAT

ȘI SUCCES !!!