Mind Generation SRL
Strada Manastur, nr 31, Ap.1,
Cluj Napoca

0747 293 739
office@mindgeneration.ro

Mind Generation
Centru de Matematica si Informatica

Arii. Arie triunghi. Arii patrulatere
~ Cls a VII-a ~

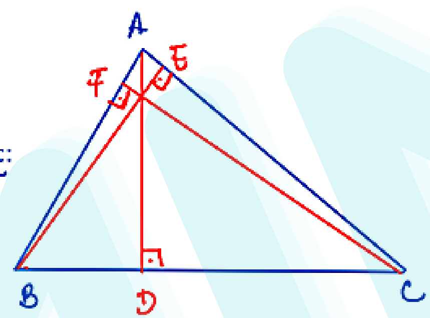
I. Aria triunghiului

I.1.Aria triunghilui oarecare

Fie ABC triunghi oarecare, ascutiunghic:
Trasam cele 3 inaltimi:

$AD \perp BC$; $BE \perp AC$; $CF \perp AB$

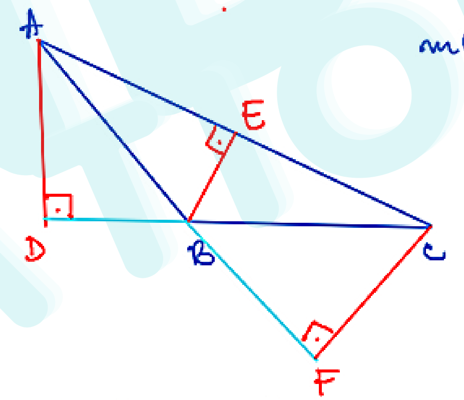
$\Downarrow$



$$\boxed{A_{ABC} = \frac{h \cdot b}{2} = \frac{AD \cdot BC}{2} = \frac{BE \cdot AC}{2} = \frac{CF \cdot AB}{2}}$$

h = înălțime (oricare dintre cele 3)
b = baza corespunzătoare înălțimii

Daca triunghiul este obtuzunghic, formulele se pastreaza, atentie cum trasam inaltimile, si cum consideram bazele:



$m(\hat{B}) > 90°$

$AD \perp BC$
$BE \perp AC$
$CF \perp AB$

Piciorul înălțimii din A cade înafara Δ-ului, pe prelungirea laturii BC. Analog CF.

$$A_{ABC} = \frac{AD \cdot BC}{2} = \frac{BE \cdot AC}{2} = \frac{CF \cdot AB}{2}$$

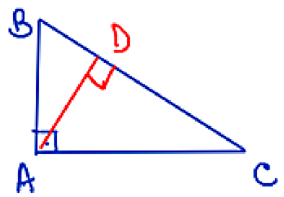
bazele sunt laturile! Nu prelungirile lor!

Mind Generation SRL
Strada Manastur, nr 31, Ap.1,
Cluj Napoca

0747 293 739
office@mindgeneration.ro

I.2. Aria triunghiului dreptunghic

Fie ABC triunghi dreptunghic, cu $\hat{A} = 90^{\circ}$



AB, AC = catete și înălțimi!

$AB \perp AC$

$AC \perp AB$

Fie $AD \perp BC$, înălțimea corespunzătoare ipotenuzei

$$\Rightarrow \boxed{A_{ABC} = \frac{h \cdot b}{2} = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{AD \cdot BC}{2}}$$

Formula $\frac{h \cdot b}{2}$ se păstrează, dar înălțimi aici toate sunt și catetele!

Deci: $\boxed{A_{ABC} = \frac{cateta_1 \cdot cateta_2}{2} = \frac{AD \cdot BC}{2}}$

$\Rightarrow$ Din egalitatea: $\frac{AB \cdot AC}{\cancel{2}} = \frac{AD \cdot BC}{\cancel{2}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{AD = \frac{AB \cdot AC}{BC}}$$

Deci înălțimea corespunzătoare ipotenuzei este produsul catetelor supra ipotenuză

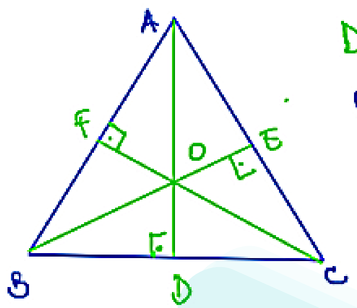
$$\boxed{h = \frac{c_1 \cdot c_2}{ip}}$$

Mind Generation SRL
Strada Manastur, nr 31, Ap.1,
Cluj Napoca

0747 293 739
office@mindgeneration.ro

I.3. Aplicatie: Triunghiul echilateral: Arie, Inaltime, Raza cercului circumscris

Fie ABC triunghi echilateral



Ducem $AD \perp BC$; $BE \perp AC$; $CF \perp AB$

Cum $\triangle ABC$ echilateral $\Rightarrow$

$\Rightarrow AB = AC = BC = l$

$AD = BE = CF = h$

$\Downarrow$

$$A_{ABC} = \frac{h \cdot l}{2}$$

Considerăm $\triangle ABD$ $\begin{cases} \widehat{ADB} = 90^\circ \\ AB = l \\ BD = \frac{l}{2} \end{cases}$ (AD = înălțime, mediană, bisectoare)

(T.P.) $\Downarrow$

$AB^2 = AD^2 + BD^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow h^2 = {}^{4)}l^2 - \frac{l^2}{4} = \frac{4l^2 - l^2}{4} = \frac{3l^2}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow h = \sqrt{\frac{3l^2}{4}} = \frac{l\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{h_{\Delta echilat.} = \frac{l\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{\Delta ech} = \frac{l \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$

$$\boxed{A_{\Delta ech} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}}$$

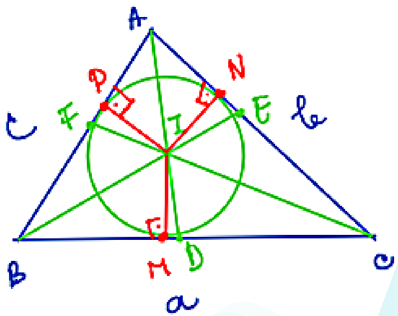
OBS: $OA = OB = OC = R$ = raza cercului circumscris $= \frac{2}{3} \cdot h = \frac{\cancel{2}^{1}}{3} \cdot \frac{l\sqrt{3}}{\cancel{2}_{1}} = \frac{l\sqrt{3}}{3}$

$\boxed{R = \frac{l\sqrt{3}}{3}}$ în Δechilat.

Mind Generation SRL
Strada Manastur, nr 31, Ap.1,
Cluj Napoca

0747 293 739
office@mindgeneration.ro

I.4. Aplicatie: raza cercului inscris intr-un triunghi oarecare



Fie ABC Δ oarecare

Fie I = centrul cercului înscris în ΔABC $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ I = intersecția bisectoarelor

Fie AD, BE, CF bisectoare

$AD \cap BE \cap CF = \{I\}$

Ducem $IM \perp BC$, $IN \perp AC$, $IP \perp AB$ $\Rightarrow IM = IN = IP = r$ = raze cercului înscris în ΔABC

Cât este r ?

Scriem $A_{ABC} = A_{IBC} + A_{IAC} + A_{IAB}$; Notăm $BC = a$; $AC = b$; $AB = c$

$A_{IBC} = \frac{IM \cdot BC}{2} = \frac{r \cdot a}{2}$

$A_{IAC} = \frac{IN \cdot AC}{2} = \frac{r \cdot b}{2}$

$A_{IAB} = \frac{IP \cdot AB}{2} = \frac{r \cdot c}{2}$

$\Rightarrow A_{ABC} = \frac{r \cdot a}{2} + \frac{r \cdot b}{2} + \frac{r \cdot c}{2} = \frac{r(a+b+c)}{2} = r \cdot p \Rightarrow$

Not. $p = \frac{a+b+c}{2}$ = semiperimetrul

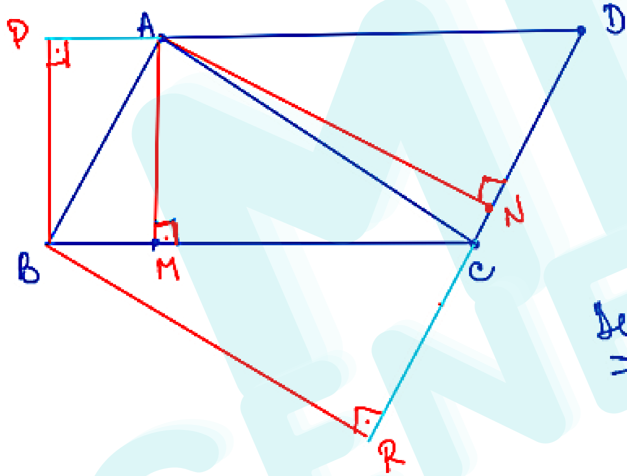
$\Rightarrow \boxed{r = \frac{A_{ABC}}{p}}$

Mind Generation SRL
Strada Manastur, nr 31, Ap.1,
Cluj Napoca

0747 293 739
office@mindgeneration.ro

II. Aria paralelogramului

Fie ABCD paralelogram.
Din orice varf al paralelogramului, putem duce cate 2 inaltimi
De ex, din A, ducem: AM ⊥ BC si AN⊥CD
Din B putem duce BP⊥AD si BR⊥CD. (BR cade pe prelungirea laturii CD)
La fel din C si D.



$$\boxed{A_{ABCD} = h\cdot B = AM\cdot BC = AN\cdot CD = BP\cdot AD = BR\cdot CD = \dots}$$

= produsul dintre înălțimea dusă dintr-un vf pe o latură (h) și latura aceea (numită bază = B)

De ce? Paralelogramul ABCD este compus din triunghiurile ABC și ACD, congruente =>

$$\Rightarrow A_{ABCD} = A_{ABC} + A_{ACD} = A_{ABC} + A_{ABC} = 2A_{ABC} = 2\cdot\frac{h\cdot B}{2} = h\cdot B$$

Mind Generation SRL
Strada Manastur, nr 31, Ap.1,
Cluj Napoca

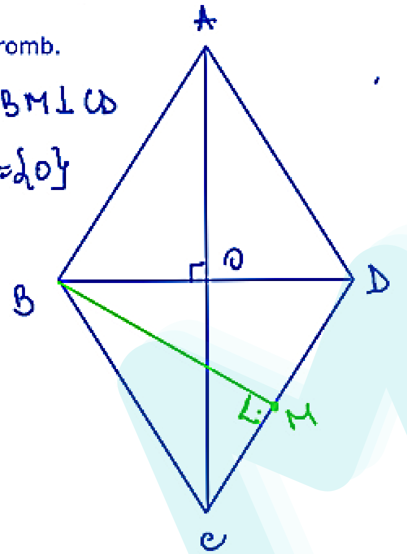
0747 293 739
office@mindgeneration.ro

III. Arie romb

Fie ABCD romb.

Ducem $BM \perp CD$

$AC \cap BD = \{O\}$



Cum rombul este un paralelogram particular $\Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{A_{ABCD} = h \cdot B}$ $(= BM \cdot CD$ de ex.$)$

Dar mai există o formulă și mai folosită pt. aria rombului:

Observăm că: $A_{ABCD} = A_{ABD} + A_{CBD} = \frac{AO \cdot BD}{2} + \frac{CO \cdot BD}{2} =$

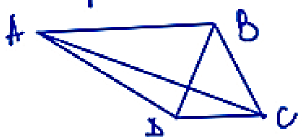
$= \frac{BD(AO + CO)}{2} = \frac{BD \cdot AC}{2} = \frac{diag\,1 \cdot diag\,2}{2}$

$\Rightarrow \boxed{A_{romb} = \frac{diag\,1 \cdot diag.2}{2}}$

În romb diagonalele sunt perpendiculare:

$AC \perp BD$!

Aplicație: În orice patrulater cu diagonalele perpendiculare (se numește ortodiagonal), aria este semiprodusul diagonalelor:



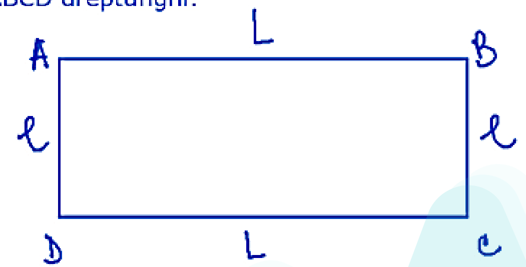
$AC \perp BD \Rightarrow \boxed{A_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2}}$

Mind Generation SRL
Strada Manastur, nr 31, Ap.1,
Cluj Napoca

0747 293 739
office@mindgeneration.ro

IV. Aria dreptunghiului

Fie ABCD dreptunghi:



Cum $AD \perp DC$; $BC \perp DC$

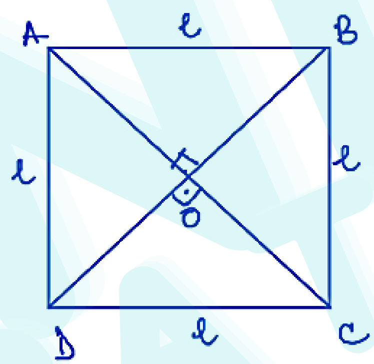
$\Rightarrow$ laturile sunt și înălțimi, și baze

$\Rightarrow$ $\boxed{A_{ABCD} = AD \cdot DC = l \cdot L}$

(not. $AD = BC = l$
$AB = DC = L$)

V. Aria patratului

Fie ABCD patrat:



Notăm $AB = BC = CD = AD = l$

$\Rightarrow$ $\boxed{A_{ABCD} = l \cdot l = l^2}$

Obs: deoarece diagonalele unui pătrat sunt perpendiculare $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ putem calcula aria și:

$$\boxed{A_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2}}$$

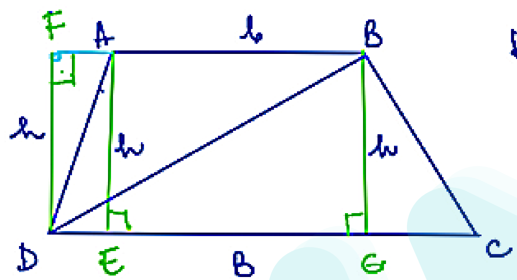
Mind Generation SRL
Strada Manastur, nr 31, Ap.1,
Cluj Napoca

0747 293 739
office@mindgeneration.ro

VI. Aria trapezului

Fie ABCD trapez oarecare:

$AB = b$
$DC = B$



Ducem $AE \perp DC$; $DF \perp AB$; $BG \perp DC \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{AE = DF = BG}_{=\text{înălțimea trapezului} = h}$ (= distanța dintre 2 drepte ∥)

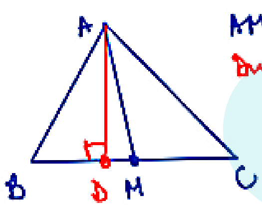
$$A_{ABCD} = A_{ADB} + A_{BDC} = \frac{DF \cdot AB}{2} + \frac{BG \cdot DC}{2} =$$

$$= \frac{h \cdot b}{2} + \frac{h \cdot B}{2} = \frac{h(b+B)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{A_{trapez} = \frac{h(b+B)}{2}}$$

VII. Aplicatii

1. Intr-un triunghi, mediana imparte triunghiul in 2 triunghiuri echivalente, adica cu arii egale, si egale cu jumatate din aria triunghului mare

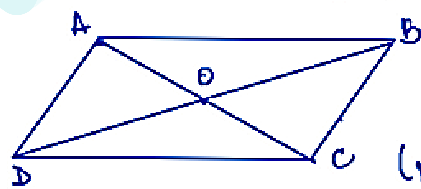


AM = mediană ($BM = MC = BC/2$)

Ducem $AD \perp BC \Rightarrow A_{ABC} = \frac{AD \cdot BC}{2}$

$$\left.\begin{aligned} A_{BDM} &= \frac{AD \cdot BM}{2} = \frac{AD \cdot \frac{BC}{2}}{2} = \frac{AD \cdot BC}{4} = \frac{A_{ABC}}{2} \\ A_{AMC} &= \frac{AD \cdot MC}{2} = \frac{AD \cdot \frac{BC}{2}}{2} = \frac{AD \cdot BC}{4} = \frac{A_{ABC}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{A_{ABM} = A_{AMC} = \frac{A_{ABC}}{2}}$$

2. Intr-un paralelogram (dreptunghi, romb, patrat), cele 4 tringhiuri formate de diagonale au arii egale intre ele (sunt triunghiuri echivalente) si egale cu un sfert din aria paralelogramului (dreptunghiului, rombului, patratului)



$$\boxed{\begin{aligned} &A_{AOB} = A_{DOC} = \\ &= A_{AOD} = A_{BOC} = \frac{A_{ABCD}}{4} \end{aligned}}$$

(pt. că AO = mediană în ΔABD, și CO mediană în CBD)