

Mind Generation  
Centru de Matematica si Informatica

~Matematica cls a V-a~  
Divizibilitate - probleme rezolvate

1. Verificati daca sumele urmatoare au ca rezultat un numar divizibil cu 5:

$$S_1 = 15 + 16 + \dots + 99$$

$$S_2 = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{2015}$$

Rezolvare:

$S_1$ : observăm că nu este o sumă Gauss completă:  
lipsește primii 14 termeni:  $1+2+\dots+14 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  completăm cu termenii lipsă, apoi îi scădem:  
$$S_1 = \underbrace{(1+2+3+\dots+14)}_{S_{14}} + 15+16+\dots+99 - \underbrace{(1+2+\dots+14)}_{S_{14}}$$

Folosim formula:

$$S_n = 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\Rightarrow S_{99} = \frac{99 \cdot 100}{2} = 99 \cdot 50$$

$$S_{14} = \frac{14 \cdot 15}{2} = (14:2) \cdot 15 = 7 \cdot 15$$

$$\Rightarrow S_1 = S_{99} - S_{14} = 99 \cdot 50 - 7 \cdot 15 = 5(99 \cdot 10 - 7 \cdot 3) =$$

↑  
dăm factor comun pe 5

$$= 5(990 - 21) = 5 \cdot 769 \stackrel{=}{=} 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_1 : 5$$

$$S_2 = 1 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2015}$$

Adunăm termenii până ajungem la un nr divizibil cu 5  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow 1+3 = 4 \neq 5$$

$$1+3+9 = 13 \neq 5$$

$$1+3+9+27 = 40 : 5$$

4 termeni

Observăm că  $S_2$  are  $2015+1=2016$  termeni }  $\Rightarrow$

Mind Generation  
Centru de Matematica si Informatica

~Matematica cls a V-a~  
Divizibilitate - probleme rezolvate

$\Rightarrow$  Cum 2016 este divizibil cu 4, înseruăm  
că cei 2016 termeni îi putem într-un  
nr. de 2016/4 grupe  $\Rightarrow$  504 grupe  
de câte 4 termeni

$$\begin{aligned} \Rightarrow S_2 &= (1+3+3^2+3^3) + (3^4+3^5+3^6+3^7) + \dots + \\ &+ \dots + (3^{2008}+3^{2009}+3^{2010}+3^{2011}) + (3^{2012}+3^{2013}+3^{2014}+3^{2015}) = \\ &= \underline{(1+3+3^2+3^3)} + 3^4 \underline{(1+3+3^2+3^3)} + \dots + 3^{2008} \underline{(1+3+3^2+3^3)} + \\ &+ 3^{2012} \underline{(1+3+3^2+3^3)} = \underbrace{(1+3+3^2+3^3)}_{=40} (1+3^4+\dots+3^{2008}+3^{2012}) \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{dăm factor comun pe } (1+3+3^2+3^3) \end{aligned}$$

$$= 40 \cdot \underbrace{(1+3^4+\dots+3^{2008}+3^{2012})}_{504 \text{ termeni}} \div 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_2 \div 5$$

2. Aratati ca numarul  $a = 3^m + 3^{m+1} + 3^{m+2} + 3^{m+3} + 3^{m+4}$   
este divizibil cu 11, pentru orice n numar natural

Rezolvare:

Folosim metoda factorului comun:

$$\begin{aligned} a &= 3^m (1+3+3^2+3^3+3^4) = \\ &= 3^m (1+3+9+27+81) = 3^m \cdot 121 = \\ &= 3^m \cdot 11^2 \div 11 \end{aligned}$$

3. Determinati numerele de forma:

- a)  $\overline{x75x} \div 3$  ; b)  $\overline{x75x} \div 5$  ; c)  $\overline{xxx} \div 4$   
d)  $\overline{71xx} \div 9$  ; e)  $\overline{14xx} \div 10$  ; f)  $\overline{x47xy} \div 45$

Rezolvare:

- a) Folosim criteriul de divizibilitate cu 3:  
 $\overline{x75x} \div 3 \Leftrightarrow (x+7+5+x) \div 3 \Leftrightarrow (2x+12) \div 3$   
 unde  $x \in \{1, 2, \dots, 9\}$  cum  $12 \div 3$  }  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow 2x \div 3$  }  $\Rightarrow x \div 3 \Rightarrow x \in \{3, 6, 9\} \Rightarrow$   
 cum  $2 \nmid 3$  }

Mind Generation  
Centru de Matematica si Informatica

~Matematica cls a V-a~  
Divizibilitate - probleme rezolvate

$\Rightarrow$  numerele cerute sunt: 3753 ; 6756 ; 9759

b)  $\overline{x75x} : 5$

Folosim criteriul divizibilității cu 5:  
ultima cifră este 0 sau 5

Dar  $x$ , fiind și prima cifră, este  $\neq 0$   $\Rightarrow$

$\Rightarrow x=5 \Rightarrow \overline{x75x} = 5755$

c)  $\overline{xx} : 4$

Folosim criteriul divizibilității cu 4:  
nr. format din ultimele 2 cifre trebuie să  
fie divizibil cu 4  $\Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{xx} : 4 \Rightarrow \overline{xx}$  pot fi: 44 sau 88

$\Rightarrow$  nr. cerute  $\overline{xxx}$  sunt: 444 și 888

d)  $\overline{71xx} : 9$

Folosim crt. divizibilitate cu 9: suma cifrelor  
trebuie să fie divizibilă cu 9  $\Rightarrow$

$\Rightarrow (7+1+x+x) : 9 \Leftrightarrow (8+2x) : 9 \Rightarrow$

unde  $x = 0, 1, \dots, 9$

$(8+2 \cdot 0) : 9 ; (8+2 \cdot 1) : 9 ; (8+2 \cdot 2) : 9 ; (8+2 \cdot 3) : 9 ;$

$(8+2 \cdot 4) : 9 ; (8+2 \cdot 5) : 9 ; (8+2 \cdot 6) : 9 ; (8+2 \cdot 7) : 9 ;$

$(8+2 \cdot 8) : 9 ; (8+2 \cdot 9) : 9$

$\Rightarrow$  Singura soluție este  $x=5 \Rightarrow \overline{71xx} = 7155$

e)  $\overline{14xx} : 10$

Crt. de divizib. cu 10: ultima cifră este 0  $\Rightarrow$

$\Rightarrow x=0 \Rightarrow \overline{14xx} = 1400$

f)  $\overline{x47y} : 45$

Descompunem nr. 45 = 5 · 9, produs de 2 nr.  
al căror crt. de divizibilitate îl cunoaștem

$\Rightarrow \overline{x47y} : 45 \Leftrightarrow \overline{x47y} : 5$  și  $\overline{x47y} : 9$

Mind Generation  
 Centru de Matematica si Informatica

Vom folosi în continuare crit. de divizibilitate  
 cu 5 și 9:

$$\overline{x47y} : 5 \Leftrightarrow y \text{ este } 0 \text{ sau } 5$$

$$\overline{x47y} : 9 \Leftrightarrow (x+4+7+y) : 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+y+11) : 9$$

Cazuri: 1.  $y=0 \Rightarrow (x+11) : 9$   
 $x = 1; 2; 3; \dots; 9 \} \Rightarrow$

$\Rightarrow x$  poate fi numai 7  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \overline{x47y} = 7470$$

2.  $y=5 \Rightarrow (x+5+11) : 9 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow (x+16) : 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow x$  poate fi numai 2  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \overline{x47y} = 2475 \Rightarrow \text{Nr. cerute sunt } 7470 \text{ si } 2475$$

4. Sa se afle x numar natural astfel incat:

- a).  $x+2 \mid 12$ ; b).  $2x+1 \mid 27$

Rezolvare:

a)  $x+2 \mid 12 \Leftrightarrow x+2$  este divizor al lui 12  
 Divizorii lui 12: 1, 2, 3, 4, 6, 12

$\Rightarrow$  1.  $x+2=1$  Nu se poate

2.  $x+2=2 \Rightarrow x=2-2=0$

3.  $x+2=3 \Rightarrow x=3-2=1$

4.  $x+2=4 \Rightarrow x=4-2=2$

5.  $x+2=6 \Rightarrow x=6-2=4$

6.  $x+2=12 \Rightarrow x=12-2=10$

Proba:

2 | 12 (A)

3 | 12 (A)

4 | 12 (A)

6 | 12 (A)

12 | 12 (A)

b)  $2x+1 \mid 27 \Rightarrow 2x+1$  este divizor al lui 27

Divizorii lui 27: 1, 3, 9, 27  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  1.  $2x+1=1 \Rightarrow 2x=0 \Rightarrow x=0$

2.  $2x+1=3 \Rightarrow 2x=2 \mid :2 \Rightarrow x=1$

3.  $2x+1=9 \Rightarrow 2x=8 \mid :2 \Rightarrow x=4$

4.  $2x+1=27 \Rightarrow 2x=26 \mid :2 \Rightarrow x=13$

Proba:

1 | 27 (A)

3 | 27 (A)

9 | 27 (A)

27 | 27 (A)