Mind Generation SRL
Strada Manastur, nr 31, Ap.1,
Cluj Napoca

0747 293 739
office@mindgeneration.ro

Mind Generation
Centru de Matematica si Informatica

Divizibilitatea numerelor naturale.
Exercitii rezovate - Cls a VI-a

1. Determinati numerele naturale a si b, stiind ca (a,b)=7 si a+b=35.

$a, b \in \mathbb{N}$; $(a,b)=7 \Leftrightarrow$ cmmdc$(a,b)=7 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists\, k, n \in \mathbb{N}$ astfel încât: $a = 7\cdot k$
$k, n \neq 0$ $\quad b = 7\cdot n$ și
$(k,n)=1$ adică
k, n sunt prime între ele

Dar $a+b=35 \Rightarrow 7\cdot k + 7\cdot n = 35 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 7(k+n)=35 \mid :7 \Leftrightarrow k+n=5$
și $(k,n)=1$, $k, n \in \mathbb{N}$

Facem tabel cu toate posibilitățile:

k	1	2	3	4
n	4	3	2	1
$a=7k$	7	14	21	28
$b=7n$	28	21	14	7

toate perechile:
$(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)$
sunt prime între ele!

$\Rightarrow$ Soluțiile: $\begin{cases} a=7 \\ b=28 \end{cases}$; $\begin{cases} a=14 \\ b=21 \end{cases}$; $\begin{cases} a=21 \\ b=14 \end{cases}$; $\begin{cases} a=28 \\ b=7 \end{cases}$

2. Determinati cel mai mic numar natural care impartit pe rand la 6 si la 15 sa dea acelasi rest 3 si catul diferit de zero.

Notăm $n \in \mathbb{N}$ numărul căutat.

$\Rightarrow$ Vom aplica Teorema Împărțirii cu Rest:

$\boxed{D = Î\cdot C + R,\ 0 \leq R < Î}$

D=deîmpărțit; $Î$=împărțitor; C=cât; R=rest.

$\Rightarrow n = 6\cdot c_1 + 3 \mid -3 \qquad c_1 \neq 0$
$\quad\ n = 15\cdot c_2 + 3 \mid -3 \qquad c_2 \neq 0 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow n-3 = 6\cdot c_1 \Rightarrow n-3 =$ multiplu de 6
$\quad\ n-3 = 15\cdot c_2 \Rightarrow n-3 =$ multiplu de 15
n = cel mai mic $\Rightarrow$
$\Rightarrow n-3$ cel mai mic $\Bigg\} \Rightarrow$

$\Rightarrow n-3 = [6;15]$
$[6;15] = [2\cdot 3; 3\cdot 5] = 2\cdot 3\cdot 5 = 30 \Bigg\} \Rightarrow$

$\Rightarrow n-3 = 30 \mid +3 \Rightarrow \underline{\underline{n = 33}}$

Proba: $33 = 6\cdot 5 + 3$
$\quad 33 = 15\cdot 2 + 3$

Mind Generation SRL
Strada Manastur, nr 31, Ap.1,
Cluj Napoca

0747 293 739
office@mindgeneration.ro

Mind Generation
Centru de Matematica si Informatica

Divizibilitatea numerelor naturale.
Exercitii rezovate - Cls a VI-a

3. Determinati numerele naturale cuprinse intre 900 si 1000 care impartite la 6 dau restul 5, impartite la 7 dau restul 6 si impartite la 11 dau restul 10.

Căutăm toate numerele $n \in \mathbb{N}$, $900 < n < 1000$ și care:

$n = 6 \cdot c_1 + 5 \quad | +1$
$n = 7 \cdot c_2 + 6 \quad | +1 \quad \Rightarrow$
$n = 11 \cdot c_3 + 10 \quad | +1$

Observăm că resturile sunt diferite, dar diferențele: $6-5 = 7-6 = 11-10 = 1$
$\Rightarrow$ vom aduna $\underline{1}$ la toate relațiile

$\Rightarrow n+1 = 6c_1 + 6 = 6(c_1+1) \Rightarrow n+1$ multiplu de 6
$n+1 = 7c_2 + 7 = 7(c_2+1) \Rightarrow n+1$ multiplu de 7
$n+1 = 11c_3 + 11 = 11(c_3+1) \Rightarrow n+1$ multiplu de 11

$\Rightarrow n+1$ este multiplu de cmmmc$(6,7,11) =$
$= [6,7,11] = 6 \cdot 7 \cdot 11 = 462 \Rightarrow$
$\Rightarrow n+1 = k \cdot 462$, $k \in \mathbb{N}$
Dar $900 < n < 1000 \quad | +1 \Rightarrow$
$\Rightarrow 901 < n+1 < 1001 \Rightarrow 901 < k \cdot 462 < 1001 \,|:462$
$\Rightarrow 1{,}95\ldots < k < 2{,}16\ldots$, $k \in \mathbb{N}$ $\Big\} \Rightarrow \underline{\underline{k=2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow n+1 = 2 \cdot 462 = 924 \Rightarrow \underline{\underline{n = 923}}$

Proba: $900 < 923 < 1000$ ("A")
și $923 = 6 \cdot 153 + 5$
$923 = 7 \cdot 131 + 6$
$923 = 11 \cdot 83 + 10$

Mind Generation SRL
Strada Manastur, nr 31, Ap.1,
Cluj Napoca

0747 293 739
office@mindgeneration.ro

Mind Generation
Centru de Matematica si Informatica

Divizibilitatea numerelor naturale.
Exercitii rezovate - Cls a VI-a

4. Calculati $x \in N$, stiind ca $(x+1) \mid (x+8)$

$$\left.\begin{array}{l} x+1 \mid x+8 \\ \text{și } x+1 \mid x+1 \end{array}\right\} \Rightarrow x+1 \mid (x+8)-(x+1) \Rightarrow$$

(x+1 divide pe el însuși)

$$\Rightarrow x+1 \mid \cancel{x}+8-\cancel{x}-1 \Rightarrow x+1 \mid 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+1 \in D_7 = \{1,7\}$$

$$x+1 \in \{1,7\} \quad \mid -1$$

$$x \in \{0,6\} \cap N = \{0,6\}$$

Soluția : $x \in \{0,6\}$

5. Fie multimile: $A = \{x \mid x \in N \text{ si } 20 \vdots x\}$
$B = \{x \mid x \in N \text{ si } x \mid 14\}$
Calculati $A \cap B$

$$A = \{x \mid x \in N, 20 \vdots x\}$$

$$20 \vdots x \Rightarrow x \in D_{20} = \{1,2,4,5,10,20\}$$

$$\Rightarrow A = \{1,2,4,5,10,20\}$$

$$B = \{x \mid x \in N, x \mid 14\}$$

$$x \mid 14 \Rightarrow x \in D_{14} = \{1,2,7,14\}$$

$$\Rightarrow B = \{1,2,7,14\}$$

$$\Rightarrow A \cap B = \{1,2\}$$

6. Determinati numarul natural n, stiind ca: $2^n + 2^{n+2} + 2^{n+1} = 56$

Dăm factor comun pe 2^n:

$$2^n(1+2^2+2) = 56 \Leftrightarrow 2^n \cdot (1+4+2) = 56$$

$$\Leftrightarrow 2^n \cdot 7 = 56 \mid :7 \Leftrightarrow 2^n = 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^n = 2^3 \Leftrightarrow \boxed{n=3} \in N$$

Mind Generation SRL
Strada Manastur, nr 31, Ap.1,
Cluj Napoca

0747 293 739
office@mindgeneration.ro

7. Determinati numerele de forma $\overline{xy}$, astfel incat:

$36^n + \overline{xy}$ sa fie divizibile cu 12, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$

Dacă $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 36^n \,\vdots\, 12$ (deoarece $36 \,\vdots\, 12$)

$\Rightarrow$ pt ca $36^n + \overline{xy}$ să fie divizibil cu 12 trebuie ca şi $\overline{xy}$ să fie divizibil cu 12 $\Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{xy} \in M_{12} = \{0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, \dots\}$

$\Rightarrow \overline{xy} \in \{12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96\}$

8. Aratati ca numarul $10^n + 125$ este divizibil cu 9, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$

$10^n = 1\underbrace{00\dots0}_{n \text{ cifre de } 0} \Rightarrow$

$\Rightarrow 10^n + 125$ are suma cifrelor: $1+1+2+5 = 9 \,\vdots\, 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow (10^n + 125) \,\vdots\, 9$

9. Este divizibil cu 73 numarul $8 + 8^2 + 8^3 + \dots + 8^{42}$? Justificati raspunsul.

Verificăm sumele pe rând:

$8 + 8^2 = 8 + 64 = 72 \not\vdots\, 73$

$8 + 8^2 + 8^3 = 8 + 64 + 512 = 584 = 73 \cdot 8$

$S = \underbrace{8^1 + 8^2 + 8^3}_{3 \text{ term.}} + \underbrace{8^4 + 8^5 + 8^6}_{3 \text{ term.}} + \dots + \underbrace{8^{40} + 8^{41} + 8^{42}}_{3 \text{ term.}}$

$\Rightarrow$ 42 termeni în total, împărţiţi în grupe de câte 3 $\Rightarrow 42 : 3 = 14$ grupe !

$\Rightarrow S = (8 + 8^2 + 8^3) + 8^3(8 + 8^2 + 8^3) + \dots + 8^{39}(8 + 8^2 + 8^3) = (8 + 8^2 + 8^3)(1 + 8^3 + \dots + 8^{39})$

$= 73 \cdot 8\,(1 + 8^3 + \dots + 8^{39}) \,\vdots\, 73$

Adevărat.