Mind Generation SRL
Strada Manastur, nr 31, Ap.1,
Cluj Napoca

0747 293 739
office@mindgeneration.ro

Mind Generation
Centru de Matematica si Informatica

Patrate perfecte si radicali - cls a VII-a

Formule si teorie pe care le vom folosi:

1. $\boxed{S_n = 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (\text{Suma Gauss})}$

2. $\boxed{1+x+x^2+\dots+x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}}$

3. NU pot să fie pătrate perfecte numerele care se termină cu cifrele: 2, 3, 7, 8

Ne bazăm pe observația că: $1^2=1$, $2^2=4$, $3^2=9$, $4^2=16$, $5^2=25$, $6^2=36$, $7^2=49$, $8^2=64$, $9^2=81$, $10^2=100$

Rezultă că numai numerele care se termină cu: 0, 1, 4, 5, 6, 9 pot să fie p.p.

Mind Generation SRL
Strada Manastur, nr 31, Ap.1,
Cluj Napoca

0747 293 739
office@mindgeneration.ro

Mind Generation
Centru de Matematica si Informatica

Patrate perfecte si radicali - cls a VII-a

1. Aratati ca numarul x=1010+2+4+6+8+...+2018 este patrat perfect si calculati $\sqrt{x}$

$$x=1010+2(1+2+3+\dots+1009)=1010+\cancel{2}^{1}\cdot\frac{1009\cdot 1010}{\cancel{2}_{1}}=1010+1009\cdot 1010=1010(1+1009)=$$
$$=1010\cdot 1010=1010^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt{x}=\sqrt{1010^2}=|1010|=1010$$

2. Caculati numarul natural x si aratati ca numarul natural x este un patrat perfect, dupa care calculati $\sqrt{x}$.

$$x-4=3(4+4^2+4^3+\dots+4^{n+2}),\ n\in\mathbb{N}$$
Calculăm întâi: $4+4^2+4^3+\dots+4^{n+2}=4(1+4+4^2+\dots+4^{n+1})=$
$$=4\cdot\frac{4^{n+2}-1}{4-1}=4\cdot\frac{4^{n+2}-1}{3}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x-4=\cancel{3}^{1}\cdot 4\cdot\frac{4^{n+2}-1}{\cancel{3}_{1}}\Leftrightarrow x=4+4(4^{n+2}-1)\Leftrightarrow x=\cancel{4}+4\cdot 4^{n+2}-\cancel{4}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=4^{n+3}\Leftrightarrow x=(2^2)^{n+3}=(2^{n+3})^2\Rightarrow x \text{ este p.p.}$$
$$\sqrt{x}=\sqrt{(2^{n+3})^2}=|2^{n+3}|=2^{n+3}$$

Mind Generation SRL
Strada Manastur, nr 31, Ap.1,
Cluj Napoca

0747 293 739
office@mindgeneration.ro

3. Aratati ca numerele de mai jos nu pot fi patrate perfecte:

a) $x = 31^n + 16$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Folosim ultima cifră: 31^n are ultima cifra $=1$; 31^n+16 are ultima cifră $1+6=7$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ x are ultima cifră 7 $\Rightarrow$ NU poate fi pătrat perfect!

b) $x = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2001}$

Nu ne ajută să folosim formula sumei de puteri!

Vom folosi metoda ultimei cifre.

Obs, că: $\underbrace{3^2+3^3+3^4+3^5}_{4 \text{ termeni}} = 9+27+81+243 = 360$

Suma: $S = 3^2+3^3+\dots+3^{2001}$ are $2001-2+1 = 2000$ termeni, ii putem grupa in 500 grupe de câte 4 termeni $\Rightarrow 3^2+3^3+3^4+3^5 + 3^4(3^2+3^3+3^4+3^5) + 3^8(3^2+3^3+3^4+3^5) + \dots + 3^{1996}(3^2+3^3+3^4+3^5) = (3^2+3^3+3^4+3^5)(1+3^4+3^8+\dots+3^{1996}) = 360 \cdot (1+3^4+3^8+\dots+3^{1996})$

$u(S) = 0 \Rightarrow u(3+S) = 3 \Rightarrow u(x) = 3 \Rightarrow$ NU poate fi p.p.!

Mind Generation SRL
Strada Manastur, nr 31, Ap.1,
Cluj Napoca

0747 293 739
office@mindgeneration.ro

Mind Generation
Centru de Matematica si Informatica

Patrate perfecte si radicali - cls a VII-a

4. Aratati ca numarul $A = \sqrt{5^{4n+2} \cdot 9^{2n+2} + 25^{2n} \cdot 3^{4n+4} \cdot 24}$ este numar natural, oricare ar fi numarul n

$5^{4n+2} \cdot 9^{2n+2} + 25^{2n} \cdot 3^{4n+4} \cdot 24 = 5^{4n+2} \cdot (3^2)^{2n+2} + (5^2)^{2n} \cdot 3^{4n+4} \cdot 24 =$

$= 5^{4n+2} \cdot 3^{4n+4} + 5^{4n} \cdot 3^{4n+4} \cdot 24 = 5^{4n} \cdot 3^{4n+4}(5^2+24) = 5^{4n} \cdot 3^{4n+4} \cdot 49 =$

$= (5^{2n} \cdot 3^{2n+2} \cdot 7)^2 = p.p. \Rightarrow$

$\Rightarrow A = \sqrt{(5^{2n} \cdot 3^{2n+2} \cdot 7)^2} = |5^{2n} \cdot 3^{2n+2} \cdot 7| = 5^{2n} \cdot 3^{2n+2} \cdot 7 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$

5. Aratati ca numarul $n = \sqrt{\overline{x9} \cdot \overline{x7} + 1}$ este numar natural, pentru orice cifra nenula x

$\overline{x9} = \overline{x8} + 1$; $\overline{x7} = \overline{x8} - 1$

notam $\overline{x8} = a \in \mathbb{N} \Rightarrow \overline{x9} \cdot \overline{x7} = (a+1)(a-1) = a^2 - \cancel{a} + \cancel{a} - 1 = a^2 - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{x9} \cdot \overline{x7} + 1 = a^2 - \cancel{1} + \cancel{1} = a^2 = (\overline{x8})^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow n = \sqrt{(\overline{x8})^2} = \overline{x8} = 10x + 8$